Systeme gewöhnlicher DGLs

$I\subset\mathbb{R}$, $f: I\times U\to\mathbb{R}^n$, ODE: $u^{(m)}(t) = f(t,u(t),u'(t),\dots,u^{(m-1)}(t))$ mit AWP $u(t_0)=u_0$.

Theorem 1.2.1 f LLZ in zweiter Komponente, dann u eindeutig in $I' = (t_0-\delta^-, t_0+\delta^+)$ (*Explosionskrit.*), falls f global Lipschitz: $I'=I$.

Baby-Grönwall $a\in\mathbb{R}$, $b,D\in(0,\infty)$, $u\in\mathcal{C}^0([t_0,t_0+D],\mathbb{R})$ mit $u(t)\le a + b\int_{t_0}^t u(s)\,\mathrm{d}s$, dann: $u(t)\le a\cdot e^{b(t-t_0)}\forall t\in[t_0,t_0+D)$

Theorem 1.2.2 f Lipschitz in zw. Komp., dann $\forall t>0$: $\left\|u_{t_0,u_0} - u_{t_0,\tilde u_0}\right\| \le e^{Lt}\|u_0-\tilde u_0\|$ außerdem $u_0\mapsto u_{t_0,u_0}$ stetig in $\|\cdot\|_{\sup}$.

Lösungstechniken

Separation der Variablen:
g,h integrierbar mit $G'=g, H'=\frac1h$ und $u'=g(t)h(u)$, dann: $u(t) = H^{-1}(G(t)-G(t_0)+H(u_0))$

Exakte und Exaktisierbare Gl'en:
$P,Q: I\times I'\to\mathbb{R}$ stetig und $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0\quad(\star)$.
$(\star)$ *exakt* $\Leftrightarrow d_\star := \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

Exaktisierung:
Suche $\mu(x,y)$, sodass $\mu\cdot(\star)$ exakt.
$\partial_y\left[\frac1Q d_\star\right] = 0 \Rightarrow \mu'(x) = \frac{\mu(x)}{Q}d_\star$
$\partial_x\left[\frac1P d_\star\right]=0\Rightarrow \mu'(y) = \frac{\mu(y)}{P}d_\star$

Bestimmung eines Potentials:
$$\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) + \int_{x_0}^x P(\tilde x, y_0)\,\mathrm{d}\tilde x + \int_{y_0}^y Q(x_0,\tilde y)\,\mathrm{d}\tilde y$$
Löse $\varphi(x,y)=C\in\mathbb{R}$ nach y auf.

Variation der Konstanten $m=1$:
$g,h\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$, $G'=g$, affine DGL: $y' = g(x)y+h(x)$, $y(x_0)=y_0$.
Dann $y_p(x) = e^{G(x)}\int h(\tilde x)e^{-G(\tilde x)}\,\mathrm{d}\tilde x$.

Wronski-Determinante:
$(u_1(t),\dots,u_n(t))$ Tupel von Funktionen. $W_u(t) := \det(\partial_x^i u_j)_{\substack{i=0,\dots,n-1\\ j=1,\dots,n}}$

Variation der Konstanten $m>1$:
$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0 y = f\quad(\star)$
FS der hom. Gl.: $(y_1,\dots,y_n)$. Dann:
$$y_p(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} y_j(x) \times \int_{x_0}^x \frac{W(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)}{W(y_1,\dots,y_n)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

Affine ODS mit konst. Koeffizienten

Theorem 1.4.1 $P\mapsto P(D)$ ist inj. Ring-hom. zw. $\mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ und Lin. Abb. auf $\mathcal{C}^\infty$

Theorem 1.4.2 Sei P bel. Polynom: $P = \prod_{j=1}^r (x-\lambda_j)^{k_j}. P(D)u = 0$ hat FS $\{\varphi_{jm} | j\in\mathbb{N}_r^*, m\in\mathbb{N}_{k_j-1}\}$ mit $\varphi_{jm} := x^m e^{\lambda_j x}$.

Theorem 1.4.4 Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ diag.: $P^{-1}AP = D$. $y'=Ay$ hat FS Pe^{Dx}.

Jordan: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ nicht diag. $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, $1\le m\le n$ EW zu A. Aufteilen: $\begin{cases}\lambda_j\in\mathbb{R} & \forall j:1,\dots,p\\ \mathrm{Im}(\lambda_j)>0 & \forall j: p+1,\dots,p+q\end{cases}$
wobei $p+2q = m$. γ_j,α_j VF der λ_j. Jordan-Basis: $\left\{v_{jk}^l : j\in\mathbb{N}_m^*, k\in\mathbb{N}_{\gamma_j}^*, l\in\mathbb{N}_{l_{jk}}\right\}$ wobei $\sum_{k=1}^{\gamma_j} l_{jk} = \alpha_j$. Es gilt $A_{jk}^1 = \lambda_j v_{jk}^1$ (echter EV) und $A_{jk}^l = \lambda_j v_{jk}^l + v_{jk}^{l-1}\ \forall l: 2,\dots,l_{jk}$ (falls $l_{jk}>1$)

Theorem 1.4.5 EV und VEV zu reellen EW reell, dann FS zu $y'=Ay$:
$$e^{\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}v_{jk}^{l-r}$$
$$j\in\mathbb{N}_p^*, k\in\mathbb{N}_{\gamma_j}^*, l\in\mathbb{N}_{l_{jk}}^*$$
$$\underbrace{\Re\left(e^{\lambda_j x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}v_{jk}^{l-r}\right)}_a, \underbrace{\Im\left(\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}v_{jk}^{l-r}\right)}_b$$
$$j = p+\mathbb{N}_q^*, k\in\mathbb{N}_{\gamma_j}^*, l\in\mathbb{N}_{l_{jk}}^*$$

wobei
$$a = e^{\Re(\lambda_j)x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}\Big[\cos(\Im(\lambda_j)x)\Re\left(v_{jk}^{l-r}\right) - \sin(\Im(\lambda_j)x)\Im\left(v_{jk}^{l-r}\right)\Big]$$
$$b = e^{\Re(\lambda_j)x}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{x^r}{r!}\Big[\cos(\Im(\lambda_j)x)\Im\left(v_{jk}^{l-r}\right) - \sin(\Im(\lambda_j)x)\Re\left(v_{jk}^{l-r}\right)\Big]$$

Koordinatentransformationen

Theorem 1.5.1 $J\subset\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f\in\mathcal{C}^0(J\times X,\mathbb{R}^n)$ LLZ. $Y\subset\mathbb{R}^n$, $\phi\in\mathcal{C}^1(J\times Y, X)$ $D_2\phi\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Sei $I\subset J$ Intervall, $y: I\to Y$ Lsg. von $y'(t) = (D_2\phi(t,y(t)))^{-1}[f(t,\phi(t,y(t))) - D_1\phi(t,y(t))]$ $\Leftrightarrow f(t,\phi(t,y(t))) = \frac{d}{dt}\phi(t,y(t))$.
Dann: $x(t) = \phi(t,y(t))$ löst $x'(t) = f(t,x(t))$.

f homogen vom Grad null:
$f:(0,\infty)^2\to\mathbb{R}$, $f(\lambda t,\lambda x) = f(t,x)$. $\phi(t,y) = ty$, dann transformiert sich $x'(t) = f(t,x(t))$, $x(t_0)=x_0$ zu $y'(t) = \frac1t(f(t,y(t)) - y(t))$, $y(t_0) = \frac{x_0}{t_0}$

f SO(2)-invariant bzw. "$f=f(r)$":
$f(x) = g(r^2(x))x + h(r^2(x))ix\ \forall x\in\mathbb{R}^2$
Polarkoordinaten: $\phi(r,\theta) = \binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$.
Dann $x'(t) = f(x(t))\Leftrightarrow \begin{cases} r'(t) = g(r^2(t))r(t)\\ \theta'(t) = h(r^2(t))\end{cases}$

Asymptotik und Stabilität

$f\in\mathcal{C}^1(D\subset\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^n)$, $y:[x_0,\infty]\to\mathbb{R}^n$ löst $y'(x) = f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$. y heißt auf $[x_0,\infty)$

stabil $:\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0:\exists\delta>0: \forall z_0\in\mathbb{R}^n: \|y_0-z_0\|<\delta \Rightarrow \left\|y_{x_0,z_0}(x) - y(x)\right\|<\varepsilon\quad\forall x\ge x_0$

attraktiv $:\Leftrightarrow \exists\delta>0:\forall z_0\in\mathbb{R}^n: \|y_0-z_0\|<\delta\Rightarrow\exists y_{x_0,z_0}$ auf I und $\left\|y(x) - y_{x_0,z_0}(x)\right\| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

asymptotisch stabil $:\Leftrightarrow$ stabil & attr.

exponentiell stabil $:\Leftrightarrow \exists\delta,L,\omega>0: \forall z_0\in\mathbb{R}^n: \|y_0-z_0\|<\delta\Rightarrow\exists y_{x_0,z_0}$ auf I und $\left\|y(x)-y_{x_0,z_0}(x)\right\| \le L\|y_0-z_0\|e^{-\omega(x-x_0)}$.

Exp. stabil $\Rightarrow$ asympt. stabil. Für $n=1$ attraktiv $\Rightarrow$ stabil. Bei linearen Systemen Stabilität unabhängig von y.

Autonome ODE-Systeme

$D\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f: D\to\mathbb{R}^n$, $y'=f(y)$. Konstante Lösungen heißen *stationär*.

Lineare Autonome: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$
spec $A := \{\lambda\in\mathbb{C}:\exists v\in\mathbb{R}^n: Av=\lambda v\}$.
$\ni\lambda$ *halbeinfach* $:\Leftrightarrow \mathrm{GV}(\lambda) = \mathrm{AV}(\lambda)$.

Theorem 2.8 $y: I\to\mathbb{R}^n$, $y'=Ay\ (\star)$.
1. $(\star)$ stabil $\Leftrightarrow \Re(\text{spec } A)\le 0$ und $\Re(\lambda)=0\Rightarrow\lambda$ halbeinfach.
2. $(\star)$ asy. s.$\Leftrightarrow$exp. s.$\Leftrightarrow\Re(\text{spec }A) < 0$ Mit $s:=\max\{\Re(\text{spec }A)\}$ gilt: $\left\|e^{Ax}y_0\right\|\le M_\omega\|y_0\|e^{\omega x}\forall\omega\in(s,0)$ Falls $\forall\lambda\in\text{spec }A:\Re(\lambda)=s\Rightarrow\lambda$ halbeinfach, dann: $\exists M>0$: $\left\|e^{Ax}y_0\right\|\le M\|y_0\|e^{sx}$

Nichtlineare Autonome:

Theorem 2.11 $f\in\mathcal{C}^1$, $y_s\in f^{-1}(\{0\})$. $J_f[y_s] := \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n(y_s)$.
1. $\forall\lambda\in\text{spec}(J_f[y_s]):\Re(\lambda)<0\Rightarrow y_s$ exp. stabil.
2. $\exists\lambda\in\text{spec}(J_f[y_s]):\Re(\lambda)>0\Rightarrow y_s$ instabil.

Ляпунов-Funktionen:
Sei f LLZ. Dann heißt $E\in\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}^n)$ *erstes Integral* von $y'=f(y)$ $:\Leftrightarrow \langle\nabla E(y), f(y)\rangle = 0\quad\forall y\in D$.
$y_s\in U\subset D$ offen, $V\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^n)$ heißt (starke) *Ljapunow-Funktion* an y_s $:\Leftrightarrow\langle\nabla V(y), f(y)\rangle\le 0\quad\forall y\in U$. $(:\Leftrightarrow \langle\nabla V(y),f(y)\rangle<0\quad\forall y\in U\setminus\{y_s\})$

Theorem 2.26 f LLZ, $y_s\in f^{-1}(\{0\})$, V (starke) LF von $y'=f(y)$ an y_s. Falls $V(y_s)<V(y)\quad\forall y\in U$, dann ist y_s (asymptotisch) stabil.

Rand- & Eigenwertprobleme

ODE zweiter Ord.: $a_0,a_1,f\in\mathcal{C}^0([a,b])$ $u''(x)+a_1(x)u'(x)+a_0(x)u(x) = f(x)$

Robin-Randbedingungen:
$\begin{cases}R_1 u := \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \eta_1\\ R_2 u := \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \eta_2\end{cases}$, $\eta_i,\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}$ und $(\alpha_0,\alpha_1)\ne 0\ne(\beta_0,\beta_1)$,
Dirichlet-RB $(\alpha_1,\beta_1) = 0$, *Neumann-RB* $(\alpha_0,\beta_0)=0$.

Periodische Randbedingungen:
$u(a)=u(b),\quad u'(a)=u'(b)$

Theorem 3.2 $Lu := u''+a_1u'+a_0u$, $Ru := C\binom{u(a)}{u'(a)} + D\binom{u(b)}{u'(b)}$, $C,D\in\mathbb{R}^{2\times 2}$
1. $\forall\eta\in\mathbb{R}^2, f\in\mathcal{C}^0([a,b]):\exists! u\in\mathcal{C}^1([a,b]): Lu=f, Ru=\eta$ **ODER**
2. $\exists u\in\mathcal{C}^1([a,b])\setminus\{0\}: Lu = 0 = Ru$.

Theorem 3.6 (u_1,u_2) FS von $Lu=0$, $\det\begin{pmatrix}R_1u_1 & R_1u_2\\ R_2u_1 & R_2u_2\end{pmatrix}\ne 0$. Dann ist $\binom{v_1}{v_2} := \begin{pmatrix}R_1u_2 & -R_1u_1\\ R_2u_2 & -R_2u_1\end{pmatrix}\binom{u_1}{u_2}$ ein FS mit $R_1v_1 = 0 = R_2v_2$.

Greensche Funktion:
$G:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ *Greensche Fkt.* für RWP $\{L\cdot = f: f\in\mathcal{C}^0([0,1])\}, R\cdot=\eta:\Leftrightarrow$
1. G stetig auf $[0,1]^2$, auf $D^\pm$ jeweils zweimal stetig partiell nach x diff'bar.
2. $(\partial_1G)^+(x,x) - (\partial_1G)^-(x,x) = 1$
3. $\forall(x,s)\in[0,1]^2: LG(\cdot,s) = 0$ falls $x\ne s$
4. $R_1G(\cdot,s) = R_2G(\cdot,s) = 0\forall s\in(0,1)$.

Theorem 3.8 G Greensche Funktion zu RWP, dann $\forall f\in\mathcal{C}^0([0,1])$: $y: x\mapsto\int_0^1 G(x,s)f(s)\,\mathrm{d}s\quad\forall x\in[0,1]$ist eindeutige RWP-Lsg., G auch eind.

Die Greensche Funktion eines Diffops P ist der *Integralkern* von P^{-1}.

Für Th. 3.6: $G(x,s) = \begin{cases}\frac{v_2(x)v_1(s)}{W(s)} & x\le s\\ \frac{v_1(x)v_2(s)}{W(s)} & x\le s\end{cases}$

Sturm-Liouville-Operatoren

$p,q\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, $p>0$. *Sturm-Liouville-Operator* zu p,q: $L_{p,q} = q + p'D + pD^2 =: L$. Es gilt $Ly = qy + (py')'$.
$\mathcal{C}_0^0(I) := \{u\in\mathcal{C}^0(I): u(a) = 0 = u(b)\}$ **Lemma 3.13** $\forall f,g\in\mathcal{C}^2([a,b])$:
1. $f(Lg) - g(Lf) = (pW_{f,g})'$
2. $\langle f, Lg\rangle - \langle Lf, g\rangle = (pW_{f,g})|_a^b$
3. $f,g\in\mathcal{C}_0^0([a,b])\Rightarrow L = L^*$
4. $p\in\mathcal{C}_0^0([a,b])\Rightarrow L=L^*$

Theorem 3.14 Homogenes L-RWP nur trivial lösbar, dann $\exists!$ Greensche Fkt. G zu $Lu=\cdot$ mit $G(x,s) = G(s,x)$.

Dirichlet-Eigenwertprobleme:
$\lambda\in\mathbb{R}$ *Dirichlet-EW* (DEW) zu L $:\Leftrightarrow \exists u\in\mathcal{C}_0^2([a,b])\setminus\{0\}: Lu+\lambda u = 0$.
u heißt Dirichlet-Eigenfunktion (DEF).
$\sigma_{\text{Dir}}(L) := \{\lambda\in\mathbb{R}:\lambda\text{ DEW zu }L\}$

Hom. RWP nichttriv. lösbar $\Leftrightarrow$ 0 DEW.

Theorem 3.17 P s.adj., $\lambda_1\ne\lambda_2$ DEW mit DEF u_1,u_2. Dann $\langle u_1,u_2\rangle = 0$.

Theorem 3.18 0 nicht DEW von L, G Greensche Fkt. zu L. Dann $Lu+\lambda u = 0$
$\Leftrightarrow \int_a^b G(x,s)u(s)\,\mathrm{d}s = -\frac1\lambda u(x)$

Theorem 3.19 $q\le 0\Rightarrow\sigma_{\text{Dir}}(L)\subset\mathbb{R}^+$

Theorem 3.20 $\lambda\in\sigma_{\text{Dir}}(L)$. Eigenfkt. zu λ bilden endlichdim. TR von $\mathcal{C}_0^0([a,b])$. Ordne $\sigma_{\text{Dir}}(L)$ in Folge in $\mathbb{R}$, dann $\lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

Stone-Weierstraß-Resultate

$\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, $\left(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty\right)$ BR.

Lemma 3.5 (Weierstraß)
$\mathrm{cl}(\mathrm{Pol}([a,b],\mathbb{K})) = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$

Trigonometrische Polynome:
$\mathrm{TPol}_\mathbb{C}(\mathbb{R}) = \mathrm{span}\{e^{ik\cdot}: k\in\mathbb{Z}\}$
$\mathrm{TPol}_\mathbb{R}(\mathbb{R}) = \mathrm{TPol}_\mathbb{C}(\mathbb{R})\cap\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathrm{span}\{\sin(k\cdot),\cos(k\cdot): k\in\mathbb{N}\}$

Theorem 3.31
$\mathrm{cl}(\mathrm{TPol}_\mathbb{K}(\mathbb{R})) = \mathcal{C}^0_{2\pi-p}(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Theorem 3.22
$\mathrm{TPol}_\mathbb{K}(\mathbb{R})\subset L^2(\mathbb{R})$. $\mathrm{TPol}_\mathbb{K}([0,2\pi])$ ist Hilbertbasis von $L^2([0,2\pi])$.

Funktionalanalysis

Hilberträume und Fourierreihen

Theorem 4.9 $\forall n,k\in\mathbb{N}$:
$\langle\cos(n\cdot),\sin(k\cdot)\rangle = 0$
$\langle\cos(n\cdot),\cos(k\cdot)\rangle = \langle\sin(n\cdot),\sin(k\cdot)\rangle = \begin{cases}0 & n\ne k\\ \pi & \text{sonst}\end{cases}$

Theorem 4.10 $u_i: [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $u_{2n-1}(x) := \frac{1}{\sqrt\pi}\cos(nx)$
$u_{2n}(x) := \frac{1}{\sqrt\pi}\sin(nx)$ sind ONS.

Fourierkoeff.: $f\in\mathcal{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$,
$a_n := \frac1\pi\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$
$b_n := \frac1\pi\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$

Hilbert-, Banach-, Frécheträume:
1. H $\mathbb{K}$-VR mit Sesquilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$, vollständig bezüglich $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Dann H $\mathbb{K}$-Hilbertraum.
2. B vollständiger normierter Raum, dann B Banachraum
3. F lokalkonvexer, vollst. metrischer Raum, dann F Fréchetraum.

Theorem 4.14 V VR mit Skalarprodukt, dann: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stetig.

Theorem 4.15 H HR, $U\subset H$ abgeschlossen und konvex. Dann $\forall f\in H:\exists! f_0\in U$:
$\|f-f_0\|\le\|f-u\|\quad\forall u\in U$
Projektion $\mathrm{pr}_U^\perp(f) := f_0$.

Theorem 4.16 H HR $U\subset H$ abgeschlossener lin. UR (⇒konvex). Dann gilt $H = U\oplus U^\perp$.

Theorem 4.17 Die Projektion ist selbstadjungiert und $\left(\mathrm{pr}_U^\perp\right)^2 = \mathrm{pr}_U^\perp$.

Theorem 4.19 $b_1,\dots,b_n\in H$ mit $\langle b_i,b_j\rangle = 0$, dann: $\left\|\sum_{i=1}^n b_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n\|b_i\|^2$

Theorem 4.20 b ONF in H, x Folge in H, dann: $\sum_{n=1}^\infty x_nb_n$ existiert in H
$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^\infty x_n^2$ existiert in $\mathbb{K}$

Theorem 4.21 (Bessel) b ONF in H, dann $\forall f\in H:\sum_{n=1}^\infty\langle f,b_n\rangle^2\le\|f\|^2$

Hilbert-Basis:
b ONF **Hilbert-Basis** $:\Leftrightarrow b(\mathbb{N})^\perp = \{0\}$

Theorem 4.24 TFAE:
1. b Hilbertbasis von H
2. $\mathrm{cl}(\mathrm{span}(b(\mathbb{N}))) = H$
3. $\forall f\in H: f = \sum_{n=1}^\infty\langle f,b_n\rangle b_n$
4. $\forall f,g\in H$: $\langle f,g\rangle = \sum_{n=1}^\infty\langle f,b_n\rangle\langle g,b_n\rangle$
5. $\forall f\in H: \sum_{n=1}^\infty\langle f,b_n\rangle^2 = \|f\|^2$

Theorem 4.27 $H = L_2([-\pi, \pi])$, u_n aus 4.10 sind Hilbertbasis.

Beschränkte Variation:
$f : I \to \mathbb{R}$ **von beschränkter Variation** $:\Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall$ Zerlegung $x_1, ..., x_n$ von I: $\sum_{i=1}^{n} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| \le M$.

Theorem 4.28 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ v. bes. Var., periodisch mit in $x \in \mathbb{R}$ stetiger per. Fortsetzung, dann konv. die Fourierreihe punktw. in x gegen f.

Theorem 4.29 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ stetig und stückw. $\mathcal{C}^1$, dann konv. die Fourierreihe gleichm. gegen f.

Komplexe Hilberträume

U $\mathbb{C}$-VR. **Hermitesches SP** auf U ist sesquilineare Form, hermitesch, nicht entartet. Falls vollständig, U $\mathbb{C}$-HR. 4.16, 4.21, 4.24, Parseval: $\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n\rangle \overline{\langle g, b_n\rangle}$

Banachräume

Theorem 4.41 U $\mathbb{K}$-VR. TFAE:
1. $\dim U < \infty$
2. $f \in L(U, U)$ injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv
3. $f \in L(U, U)$ surjektiv $\Rightarrow f$ injektiv
4. $V \subseteq U$ LUR, $V \simeq U \Rightarrow V = U$

Theorem 4.42 U $\mathbb{K}$-VR. TFAE:
1. $\dim U < \infty$
2. Alle Normen auf U sind äquivalent
3. $u \in U^{\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow u$ hat KTF
4. $\forall V \subseteq U$ LUR: V abgeschlossen
5. $\forall l \in L(U, \mathbb{K}) : l$ stetig

L^p-Räume:
$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $p \in [1, \infty)$. $\mathcal{L}^p(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_I |f(x)|^p \,dx < \infty \right\}$
$\|\cdot\|_p := \left(\int_I |\cdot|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. (Pseudonorm)
$\mathcal{N}(I) := \{ f \in \mathcal{L}^p(I) : \mu(\operatorname{supp} f) = 0\}$
$L^p(I) := \mathcal{L}^p(I)/\mathcal{N}(I)$ (Menge von Äquivalenzklassen) mit Norm $\|\cdot\|_p$

Theorem 4.58 $p \in [1, \infty) \Rightarrow L^p(I)$ BR.

Theorem 4.59 $p, q \in \mathbb{R}$ hölderkonj, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $f \in L^p(I), g \in L^q(I)$. Dann $fg \in L^1(I)$ und $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$.

Beschränkte lineare Transformationen

Operatornorm V, W normierte Räume, $A : V \to W$ linear.

$$\|A\| := \sup_{f \in V\setminus\{0\}} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{g \in V, \|g\|=1} \|Ag\|$$

A **beschränkt** $\Leftrightarrow \|A\| < \infty$.
Projektionen haben Norm 0 oder 1.

Theorem 4.67 V, W normierte Räume, $A : V \to W$ linear, dann:
A stetig $\Leftrightarrow A$ beschränkt
$\mathrm{CL}(V, W) := \{A \in L(V, W) : A \text{ stetig}\}$

Theorem 4.71 V, W normierte Räume, V endlichdim. Dann V BR und $\forall A \in L(V, W) : A$ stetig.

Dualraum: B $\mathbb{K}$-BR. $B^* := \mathrm{CL}(B, \mathbb{K})$

Theorem 4.75 (Riesz-Fréchet)
H $\mathbb{K}$-HR, $A \in H^*$. Dann $\exists! g \in H : Af = \langle g, f\rangle \quad \forall f \in H$ und $\|A\| = \|g\|$.
HR sind selbstdual. Es gilt $(L^p)^* \simeq L^{p^*}$ und $(L^p)^* \simeq L^p \Leftrightarrow p = 2$.

Lineare Operatoren

H HR, $\{0\} \ne D \subset H$, $T : D \to H$ linear heißt **linearer Operator**.

Integralkern: $H = L^2(I)$, $D = \mathcal{C}^0(I)$, $K \in \mathcal{C}^0(I^2, \mathbb{C})$. T def. $\forall f \in D$ durch $(Tf)(x) := \int_I K(x, y) f(y) \,dy \quad \forall x \in I$
ist stetig. $\|T\| \le \sup_{x \in I^2} K(x) \mu(I)$.

Theorem 4.83 H HR, $D \subset H$ dicht, $T \in \mathrm{CL}(D, H)$. Dann gilt $\#\{\overline{T} \in \mathrm{CL}(H, H) : \overline{T}|_D = T\} = 1$. Außerdem $\|T\| = \|\overline{T}\|$.

Adjungierte: H HR, $T : H \to H$ linear. $T^* : H \to H$ **Adjungierte** zu T $:\Leftrightarrow \langle Tf, g\rangle = \langle f, T^* g\rangle \quad \forall f, g \in H$.
Es gilt $(T^*)^* = T$.

Selbstadjungiert: H HR, $D \subset H$ dicht, $T : D \to H$ linear. T **hermitesch** $:\Leftrightarrow \langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle \quad \forall f, g \in H$. Falls $D = H$, T **selbstdajungiert**.

Theorem 4.84 H HR, $T \in \mathrm{CL}(H, H)$, dann $\exists$ Adjungierte $T^* \in \mathrm{CL}(H, H)$ mit $\|T\| = \|T^*\|$.

Fourier-Transformation:
$T : L^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, def. $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$: $(Tf)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} \,dx \; \forall y \in \mathbb{R}$
T ist Isometrie (Plancherel) und unitär.
$(T^* g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} g(y) \,dy \; \forall x \in \mathbb{R}$
$T^* g = \overline{T\overline{g}}$.

Theorem 4.90 (Toeplitz) H HR, $T \in \mathrm{CL}(H, H)$. TFAE:
1. $\exists T^{-1} \in \mathrm{CL}(H, H) : TT^{-1} = \mathrm{id}_H$
2. $\exists d > 0 : \forall x \in H : \|Tx\| \ge d\|x\|$ und $\ker T^* = \{0\}$.

Unitäre Operatoren

$U : H \to H$ linear. U **unitär** $\Leftrightarrow U$ isometrisch und surjektiv.

Theorem 4.93 $U \in \mathrm{CL}(H, H)$. U unitär $\Leftrightarrow UU^* = U^* U = \mathrm{id}_H$.

Schwache Konvergenz

B $\mathbb{C}$-BR. $u : \mathbb{N} \to B$ **schwach-konvergent** $:\Leftrightarrow f \circ u$ konvergent $\forall f \in B^*$.
$\Leftrightarrow f \circ u \underset{n_\infty}{\to} f(u_\infty) \forall f \in B^* \quad \Leftrightarrow \langle v, u_n\rangle \underset{n_\infty}{\to} \langle v, u_\infty\rangle \forall v \in B$ (für HR)

Schwacher Abschluss: H HR, $u \in H^{\mathbb{N}}$, $u(\mathbb{N}) \subset B(0, r)$ schwach konv. gegen u_∞ in H. Dann $u_\infty \in \overline{B}(0, r)$.

Theorem 4.98 H HR, $u \in H^{\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann hat u schwache KTF.

Kompakte Operatoren

V, W BR, $T \in \mathrm{CL}(V, W)$ **kompakt** $:\Leftrightarrow \forall u \in V^{\mathbb{N}}$ bes.: $(T \circ u)$ hat KTF
$\Leftrightarrow \forall U \subset V$ bes.: $\mathrm{cl}(T(U))$ kpt
$K(B) := \{T \in \mathrm{CL}(B, B) : T \text{ kpt}\}$

Theorem 4.112 B BR, $T \in K(B) \Rightarrow \mathrm{cl}(T(B(0, 1)))$ kpt.
id_B ist im Allgemeinen nicht kompakt.
Operatoren mit stetigem Integralkern sind kompakt.

Lemma 4.115 H HR, $T \in K(H)$, $E_\lambda := \ker(T - \lambda\,\mathrm{id})$ (ER zu EW $\lambda \ne 0$) Dann ist $\dim E_\lambda < \infty$.

Theorem 4.117 H $\mathbb{C}$-HR, $T \in K(H)$, $\varepsilon > 0$. Dann $\#\left\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| > \varepsilon\right\} < \infty$.

Uniform Boundedness

Theorem U1 (Baire) $X \ne \emptyset$ vollst. metr. Raum, $X = \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, A_k abg. in $X \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : \operatorname{int} A_k \ne \emptyset$.

Theorem U2 (Uniform Boundedness Principle) $X \ne \emptyset$ vollst. metr. Raum, Y normierter Raum. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(X, Y)$ mit $\sup\left\{\|f(x)\|_Y : f \in \mathcal{F}\right\} < \infty \quad \forall x \in X$. Dann $\exists x_0 \in X : \exists \varepsilon_0 > 0 : \quad \sup\left\{\left\|f|_{\overline{B}(x_0, \varepsilon_0)}\right\|_\infty : f \in \mathcal{F}\right\} < \infty$.

Theorem U3 (Banach-Steinhaus) X BR, Y norm. Raum. Sei $\mathcal{T} \subset \mathrm{CL}(X, Y)$ mit $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty \; \forall x \in X$. Dann $\mathcal{T}$ beschränkt, d.h. $\sup\left\{\|T\|_{\mathrm{CL}(X,Y)} : T \in \mathcal{T}\right\} < \infty$.

Notation Dualraum:
X normierter Raum, $x \in X$, $x^* \in X^*$. $\langle x, x^*\rangle_X := x^*(x)$.
Für X HR: $R_X : X \to X^*, x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$.
$\langle x, y\rangle_X = \langle x, R_X(y)\rangle_X \quad \forall x, y \in X$
$\langle x, x^*\rangle_X = \langle x, R_X^{-1}(x^*)\rangle \forall x, x^* \in X, X^*$

Theorem U5 X BR, Y norm. Raum. $\mathcal{T} \subset \mathrm{CL}(X, Y)$ mit $\forall x \in X : \forall y \in Y^*$: $\sup\left\{\left|\langle Tx, y'\rangle_Y\right| : T \in \mathcal{T}\right\} < \infty$
Dann ist $\mathcal{T}$ beschränkt in $\mathrm{CL}(X, Y)$.

Offene Abbildungen:
X, Y top. Räume, $f : X \to Y$ **offen** $:\Leftrightarrow f(U)$ offen $\forall U \subset X$ offen

Theorem U7 (Open Mapping Thm) X, Y BR, $T \in \mathrm{CL}(X, Y)$. Dann:
T surjektiv $\Leftrightarrow T$ offen.

Theorem U8 (Inverse Mapping Thm) X, Y BR, $T \in \mathrm{CL}(X, Y)$. Dann:
T bijektiv $\Leftrightarrow T^{-1}$ stetig.

Theorem U9 (Closed Graph Thm) X, Y BR, $T : X \to Y$ linear. Dann:
$\{(x, Tx) : x \in X\}$ abg. $\Leftrightarrow T$ stetig.

Stetigkeit bei Adjungierter: Falls eine Adjungierte existiert, sind der Operator und die Adjungierte stetig. Selbstadjungierte Operatoren sind immer stetig.

Hahn-Banach

Theorem H1 (Hahn-Banach) X $\mathbb{R}$-VR mit
1. $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear, d.h. homogen, $\forall x, y \in X : p(x + y) \le p(x) + p(y)$
2. $Y \subset X$ LUR, $f : Y \to \mathbb{R}$ linear
3. $f(x) \le p(x) \; \forall x \in Y$

Dann $\exists F : X \to \mathbb{R}$ linear mit $F|_Y = f$ und $F(x) \le p(x) \; \forall x \in X$

Zorn's Lemma $(N, \le) \ne \emptyset$ partiell geordnete Menge mit $\forall Y \subset N : \exists n \in N : \forall y \in Y : n \ge y$
Dann $\exists n^* \in N : \forall n \in N : n^* \ge n$.

Theorem H2 (HB für $\mathrm{CL}(X, \mathbb{K})$) X norm. $\mathbb{K}$-VR, $Y \subset X$ LUR. Dann $\forall y^* \in Y^* : \exists x^* \in X^* : x^*|_Y = y^*$ und $\|x^*\| = \|y^*\|$.

Theorem H3 X norm. Raum, $Y \subset X$ abg. LUR, $x_0 \in X \setminus Y$. Dann $\exists x^* \in X^*$: $x^*(Y) = \{0\}, \|x^*\|_{X^*} = 1$, $x^*(x_0) = d(x_0, Y) := \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}$

Theorem H4 X norm. Raum, $x_0 \in X$. Dann:
1. Für $x_0 \ne 0 : \exists x_0^* \in X^* : \|x_0^*\|_{X^*} = 1$ und $x_0^*(x_0) = \|x_0\|_X$
2. $x^*(x_0) = 0 \; \forall x^* \in X^* \Rightarrow x_0 = 0$
3. $\left[\mathrm{ev}_{x_0} : x^* \mapsto x^*(x_0)\right] \in X^{**}$ mit $\left\|\mathrm{ev}_{x_0}\right\|_{X^{**}} = \|x_0\|_X$

Spektrum von Operatoren

Theorem 4.100 B BR, $T \in \mathrm{CL}(B, B)$ bijektiv. Dann ist $T^{-1} \in \mathrm{CL}(B, B)$.

Lemma 4.102 B BR, $T \in \mathrm{CL}(B, B)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $\mathrm{id} - T$ beschränkt invertierbar und $\left\|(\mathrm{id} - T)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|T\|}$.

Theorem 4.103 B BR, $S \in \mathrm{CL}(B, B)$ beschränkt invertierbar. Sei $\|S - T\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$. Dann auch T beschränkt invertierbar.

Spektrum: B BR, $T \in \mathrm{CL}(B, B)$.
1. $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\,\mathrm{id} \text{ nicht bij.}\}$
2. $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\,\mathrm{id} \text{ nicht inj.}\}$
3. $\sigma_c(T) := \left\{\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) : \overline{(T - \lambda\,\mathrm{id})(B)} = B\right\}$
4. $\sigma_r(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) \setminus \sigma_c(T)$

Es gilt:
$\sigma(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$.
$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in B : Tx = \lambda x\}$

Theorem 4.106 B BR, $T \in \mathrm{CL}(B, B)$. Dann $\sigma(T)$ kpt in $\mathbb{C}$, $\sigma(T) \subset \mathrm{cl}(B(0, \|T\|))$.

Theorem 4.110 B BR endlichdim., $T \in \mathrm{CL}(B, B)$. Dann $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

Selbstadjungierte kompakte Operatoren

Lemma 4.121 H HR, $T \in \mathrm{CL}(H, H)$ selbstadjungiert. Dann ist

$$\|T\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$$

Theorem 4.122 H HR, $T \in \mathrm{CL}(H, H)$ selbstadjungiert, $c > 0$ mit $|\langle Tx, x\rangle| \le c\|x\|^2$. Dann $\|T\| \le c$.

Theorem 4.123 H HR, $T \in K(H)$ selbstadjungiert. Dann $\|T\| \in \sigma_p(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma_p(T)$.

Theorem 4.124 (Spektralsatz) H HR, $T \in K(H) \setminus \{0\}$ selbstadjungiert. Dann gilt
1. Entweder T hat endlich viele EW: $\|T\| = |\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge ... \ge \|\lambda_N\|, N \in \mathbb{N}$
2. Oder T hat abzählbar unendlich viele EW $\lambda_n \ne 0$. Dann $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

$\exists$ EV-ONS $(u_1, ..., u_n)$ oder $(u_n)_n$ mit $\forall x \in H$:
$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, u_n\rangle u_n + x_0$ bzw. $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n\rangle u_n + x_0$
wobei $x_0 \in \ker T = \operatorname{span}(u_1, ...)^\perp$
und
$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n\rangle u_n$ bzw. $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n\rangle u_n$.
Ist $\ker T = \{0\}$, sind die u_i Hilbertbasis.

Korollar 4.125 H HR, $T \in \mathrm{CL}(H, H)$ selbstadjungiert, dann $\sigma(t) \subset \mathbb{R}$.

Korollar 4.126 H HR, $T \in \mathrm{CL}(H, H)$ selbstadjungiert und kpt, $0 \notin \sigma_p(T)$ und $\#\sigma_p(T) = \infty$. Dann ist $0 \in \sigma_c(T)$.

Spektraler Radius

X BR, $A \in L(X, X)$, **spektraler Radius** $r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Es gilt $r(A) \le \|A\|$, $r(\lambda A) = |\lambda| \cdot r(A)$.

Theorem S2 X BR, $A \in L(X, X)$, $P \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$. Dann $P(\sigma(A)) = \sigma(P(A))$.

Theorem S3 X BR, $A \in L(X, X)$. Dann $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} r(A)$.

Integralgleichungen

$K : [a, b]^2 \to \mathbb{C}$ stetig, $H = L^2([a, b])$, $T \in K(H)$ definiert $\forall f \in H$ durch $(Tf)(x) := \int_a^b K(x, y) f(y) \,dy \quad \forall x \in [a, b]$.

Lemma 5.1 $K(s, t) \in \mathbb{R} \forall (s, t) \in [a, b]^2$ Dann ist T selbstadjungiert.

Theorem 5.2 $g \in H$, $K(s, t) \in \mathbb{R}$ $\forall (s, t) \in [a, b]^2$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann: $f(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) f(t) \,dt + g(s)$ $(\star)$
1. Wenn $\frac{1}{\lambda}$ kein EW von T ist, dann hat $(\star)$ genau eine Lösung $\forall g \in H$.
2. Wenn $\frac{1}{\lambda}$ ein EW von T ist, dann $(\star)$ lösbar $\Leftrightarrow g \in E_{\frac{1}{\lambda}}^\perp$. (Dann $\#\mathrm{LR} = \infty$)

Korollar 5.3 (Fredholm) $g \in H$, $K(s, t) \in \mathbb{R} \; \forall (s, t) \in [a, b]^2$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann:
1. Entweder besitzt $f - \lambda \int_a^b K(\cdot, t) f(t) \,dt = g$ eine eindeutige Lösung $\forall g \in H$
2. Oder die homogene Gleichung $f - \lambda \int_a^b K(\cdot, t) f(t) \,dt = 0$ besitzt eine nichttriviale Lösung.